ラッセルのパラドクスに関して：「二階の述語論理」の問題点

2020 年 7 月 9 日
宮国淳
http://miya.aki.gs/mblog/

本稿は野矢茂樹著『論理学』（東京大学出版会、1994 年）におけるラッセルのパラドクスに関連する論理の問題点を指摘するものである。

二階の述語論理というものを構築するにあたって、「述語」あるいは「集合」という”言葉”を実体化させ別の意味を与えて要素化するという余計なプロセスが入り込んでいるために、パラドクスが生じてしまっている面があるのではなかろうか。

犬の集合は犬である。犬が集合したからといって犬とは別のもの（「述語」や「集合」といった”概念”）に変化するわけではない。

そして論理と現実とを突き合わせて齟齬が生じたのならば、変更を加えるべきは論理の方である。論理はあくまで現実世界の在り方、そしてそれに対する人々の一般的認識に根拠づけられているのだから。

＜目次＞

１．命題関数（述語）のパラドクスの議論における問題点：「述語」という言葉の実体化（2 ページ）
２．ω(x)が成立するとは？（3 ページ）
３．ω(x)の x にωを代入することはできない（4 ページ）
４．集合のパラドクスの議論における問題点：「集合」という言葉の実体化（5 ページ）
５．二階の述語論理ではなく、言葉が示す具体的対象による検証（6 ページ）
６．主語であろうと述語であろうと、それぞれ具体的対象を持つ言葉であることに変わりはない（8 ページ）

１．命題関数（述語）のパラドクスの議論における問題点：「述語」という言葉の実体化

> *ω(x)を「x は自分自身に述語づけられないような述語である」という命題関数であるとする*（野矢、131 ページ）

としたうえで、例えばＦを「……は日本語である」という述語であるとした場合、「日本語である」は日本語だからＦは自分自身に述語づけられる述語、つまりω(F)は成立しないとしている。

一方、Ｇを「……は犬である」という述語であるとした場合、「犬である」という述語は犬ではないから ω(G)は成立しないとしている（野矢、131～132 ページ）。その上で、

> *「日本語である」は日本語であるが，「犬である」は犬ではない．*（野矢、132 ページ）

と断定しているのであるが・・・違和感を抱かざるをえない。

ここにおける「述語」とは何を表わしているのだろうか？

x is a Japanese word.　（あまりこんな言い回しはしないかもしれないが）
x is a dog.

の場合、
Ｆは is a Japanese word(A)なのか、a Japanese word(B)なのか？
Ｇは is a dog(A)なのかa dog(B)なのか？

もし(A)だったら、Is a Japanese word is a Japanese word.のようなナンセンス文になってしまうのではないか。同様に、Is a dog is a dog.とかIs a cat is a cat.についても単なるナンセンス文になってしまう。そもそも成立しえない議論ではなかろうか。

上記の野矢氏の説明は、”Is a Japanese word” is a Japanese word.のように、主語を””で囲ってニュアンスを変化させた上で初めて成立する主語・述語関係なのではなかろうか。この場合、「日本語である」「言葉である」「言語である」といった言葉に関連する述語に関してのみ” 自分自身に述語づけられる述語が成立する、ということになろう。

もし(B)の場合はどうだろうか？ A Japanese word is a Japanese word. A dog is a dog. A cat is a cat.のように、日本語の言葉は日本語の言葉だ、犬は犬だ、猫は猫

だ、というふうに単なるトートロジー的表現になるであろう。The sky is blue.ならば述語はblueだからBlue is blue.というふうになる。

私が思うに、後述する集合のパラドクス（野矢、133～134ページ）の議論を考え合わせると、(B)の認識が正しいのではないだろうか。

さらに野矢氏は、”*「犬である」という述語は犬ではない*”（野矢、131ページ）というふうに、「述語」という言葉を別個に実体化し、(A)と(B)とを混同させて問題を歪めているのではなかろうか。先に（私が）述べた”Is a Japanese word” is a Japanese word.におけるニュアンスの変化とは、**「日本語である」という”述語”は日本語である、というふうに、「述語」という言葉が間に入り込んでしまっている**ということなのである。

犬は犬であって述語ではない。ここで扱われているのは述語である「犬」であって「犬」という述語ではないのである。ここをひっくり返すこと（あるいは**「述語」という別個の要素を差し込む**こと）でパラドクスのように見せかけているのではなかろうか。

日本語は日本語、犬は犬

なのである。

２．ω(x)が成立するとは？

ここまでの議論で明らかになったと思うが、**「述語を述語づける」とは「日本語は日本語だ」「犬は犬だ」「青は青だ」というふうなトートロジー的表現のこと**である。そうならば「自分自身に述語づけられないような述語」というもの自体が存在しないようにも思える。

ただ、述語が動詞の場合はどうだろうか？ He is running.やHe runs.などの場合、Running is running. Runs runs.というふうに、ニュアンスが変化してしまうかナンセンス文になってしまうように思える。文学的表現ではありえそうな気もする・・・？この場合ω(x)が成立しうると言えるような気がしないでもない。

述語が形容詞の場合は？ The scenery is beautiful.の場合だと、Beautiful is beautiful.となって、文として成立しているようなしていないような・・・さきほどのBlue is blue.だと問題なさそうなのだが。

「自分自身に述語づけられないような述語」の基準は少しあいまいなものであるような気もするのである。

３．ω(x)のｘにωを代入することはできない

ω(x)のｘは ω になりえない。なぜならｘとは“述語となりうる（何らかの対象を持った）言葉”であり、ω とは「～は自分自身に述語づけられないような述語である」という関数式なのである（野矢氏はそう考えておられないようだが)。つまり **ｘにωを代入するということ自体、（先に示したような）ニュアンスの恣意的な変更である**のだと言える。

ω(x)≡¬x(x)は何を示している論理式なのだろうか？「x は自分自身に述語づけられないような述語である」≡「x は自分自身に述語づけられる述語ではない」ということを言いたかったのか。であるならば、本来はω(x)≡¬y(x)のようになるべきではないのか。ω(x)≡¬x(x)だと、仮に「走る」が自分自身に述語づけられないような述語であるとすれば、x＝「走る」を代入してω(走る)≡¬走る(走る)となってしまう。¬走る(走る)とはいったい何のことなのだか、わけがわからない。

野矢氏（ラッセル？）がやろうとしていること（ω(x)≡¬x(x)に x=ω を代入すること）はまさにそういうことなのである（さらに言えばωは関数式である)。F(x)はF(x)＝$3x^2+4x-5$ のように何らかの数式や定義づけによって示されるものである。F の部分に何かを代入することはない。「*二階の述語論理*」（野矢、130 ページ）だからというのは理由になりえない（これに関しては５章でも少し説明する)。

ω(x)＝x は自分自身に述語づけられないような述語である

ということであって、ω の部分に何かを代入することなどできないのである。それは¬x(x)の¬x についても同様である。

あるいはF(x,y)=「x を y に述語づけることができない」、G(x,y)=「x を y に述語づけることができる」とすれば、F(x,y)≡¬G(x,y)となるだろうか。そして F(x,x)≡¬G(x,x)となるだけである。

述語づけることができないのなら、それだけの話である。述語づけられないものは述語づけられないし、述語づけられるものは述語づけられる。パラドクスとは関係ないようにも思えるのだが・・・

４．集合のパラドクスの議論における問題点：「集合」という言葉の実体化

これも命題関数（述語）のパラドクスの議論に似ている。

犬の集合は犬か？ 違うな（野矢、133 ページ）

とあるが、これも「集合」という言葉を別個に分離させ、話を歪めてしまっている。**犬が集まったもの、あるいはたくさんの犬を総称したものも、結局は犬であることに変わりはない**。「犬の集合」とは犬が集まったもの、「星の集合」は星が集まったものだし、「天の川」は星の集まりである。「*もはや星ではない*」（野矢、133 ページ）というのはおかしな話だ。天の川が星の集まりでなかったら何の集まりなのであろうか？ 星や犬が集まったら星や犬でなくなるとでも言うのだろうか？

もちろん**「集合」という”言葉”は犬でも星でもない。しかし、犬が集まったら「集合」という”言葉”になるわけでもないし、星が集まっても「集合」という”言葉”になるわけでもない。**

ここにおけるニュアンスの恣意的な操作がパラドクスにつながっているのだと言えよう。

つまり S∈S、ではなく S＝S、命題関数（述語）のパラドクスの議論と同様、単なるトートロジー的表現に落ち着くだけなのだと言える。「*自身を要素としてもつ*」（野矢、133 ページ）ということはありえない、それは**「集合」という”言葉”を実体化して、あたかもそれが別個の要素として存在しているかのように錯覚させ、パラドクスへ導いている**のだと言える。繰り返すが「集合」というものが「集合」自身を要素としてもつということ自体がありえないのである。

５．二階の述語論理ではなく、言葉が示す具体的対象による検証

野矢氏は“ラッセルのパラドクス普及版として”二つの事例を挙げているので、それについても論じておこうと思う。

(1)床屋のパラドクス

ある村に住む床屋が次のような貼紙を出した.

この村に住む人で自分でひげを剃らない人，その人のひげだけを私は剃りますが，私の誇るところは，そのような人のひげはすべて私が剃る，ということであります.（店主敬白）

さて，この床屋自身のひげは誰が剃るのか？（野矢、134 ページ）

確かに床屋自身を「この村に住む人で自分でひげを剃らない人」とすると「そのような人のひげはすべて私が剃る」という命題と矛盾する。

論理と現実とが齟齬をきたした場合、間違えているのは論理の方であって、①論理を修正する、あるいは②コンテクストを想像し理解する場合もあろう。どちらの場合も結局は**現実世界を検証した上でどう理解するか**という話になる。

もし現実世界であったならば、上記のように告知されていたとすれば、床屋自身は勘定に含まれていないという理解が適当であると考えられる。床屋は自分で剃っても良いし人に剃ってもらっても良い、好きなようにするであろう。

これは「ここの村人は嘘つきだ、と村人自身が言う」といった自己言及のパラドクスと同じであろう。これが現実の世界であったらどうであろうか？ 例えば社会調査などしていてこのような証言があったとする。調査者はこの村の人々の日々の生活を観察して、どのような時に嘘をつくのか、どのくらい頻繁に嘘をつくのか、嘘をよくつく人はどれくらいいるのか、そういった具体的な情報を得た上で、「ここの村人は嘘つきだ」という証言の具体的意味を探るのではなかろうか。そもそも日常生活において嘘だけをつきながら暮らすことなど無理なことなのだから。

論理と現実が齟齬をきたしている場合、現実を検証し論理を修正、あるいはコンテクスト理解するというのが思考の道筋というものである。**メタ論理ではなく現実世界の検証**なのである。

論理の面で言うと、「x は y のひげを剃る」を x(y)と表わす（野矢、249 ページ）のは誤解を生みかねないので F(x, y)=x は y のひげを剃る、とすべきだろう。「*二階の述語論理*」（野矢、130 ページ）ではなく、「*一階の述語論理*」（野矢、130 ページ）として扱うのである。そもそも述語論理に”二階”というものがあるのかどうか怪しいのだが。

$\forall x(F(\omega, x) \equiv \neg F(x, x))$

を ω で例化すると、$F(\omega, \omega) \equiv \neg F(\omega, \omega)$で床屋自身を村人の勘定に入れると論理的には矛盾となる（これに関しては野矢氏の説明と同じであるが)。ω以外で例化すれば矛盾とならない。つまり∀を取り除く必要がある。$F(\omega, x) \equiv \neg F(x, x)$は $x=\omega$ のとき以外に成立する論理式だ、という結論になろう。

その上で、現実として床屋や他の村人たちがどう考えているのか、どう行動しているのかという話になって来るだろう。

(2)市長のパラドクス

自分が市長をしている市に住んでいない市長を「不在市長」と呼ぶことにする．不在市長が集まってひとつの市「不在市長市」を作ることになった．その市には不在市長のみが住み，しかもすべての不在市長が住む．さて，不在市長市にも市長が選ばれた．しかし彼はどこに住めばよいのだろうか．（野矢、135 ページ）

この事例はよく分からないのだが・・・不在市長市の住人は二重戸籍になるということだろうか？ そこが既に問題なのだが。

二重戸籍ということはどちらかの戸籍を選ばないとならないだろうし・・・不在市長市を選べば既に市長である権利を失っていないだろうか？ もといた戸籍を選べば不在市長市の市民・市長の権利を失う。

二重戸籍（あるいは三重戸籍）や二つの市の市長の兼任が許されるのであれば・・・不在市長市の市長はさらに別の市に移り住めば矛盾でなくなる気がするし、不在市長市の市長は不在市長市に住んでも別にかまわないようにも思える。いずれにせよいったいどこまで何が許されるのか、細かい設定に関する判断がつかないので(前提にないので)結論づけようもない。

言葉尻だけをとらえて論理として考えれば、仮に不在市長市の市長になっても不在市長市に住み続けるのであれば、$(x \in x) \wedge (x \notin x)$となり矛盾となるだろう。これも別に二階の述語論理を引き合いに出さなくても良い問題である。

６．主語であろうと述語であろうと、それぞれ具体的対象を持つ言葉であることに変わりはない

以下、西田幾多郎著『善の研究』（第 4 刷、岩波文庫、2014 年）からの引用である。

> *例えば「馬が走る」という判断は、「走る馬」という一表象を分析して生ずるのである。それで、判断の背後にはいつでも純粋経験の事実がある。判断において主客両表象の結合は、実にこれに由りてできるのである。勿論いつでも全き表象が先ず現れて、これより分析が始まるというのではない。先ず主語表現があって、これより一定の方向において種々の聯想を起し、選択の後その一に決定する場合もある。しかしこの場合でも、いよいよこれを決定する時には、先ず主客両表象を含む全き表象が現れて来なければならぬ。*（西田、28 ページ）

私は西田の見解に完全に賛同しているわけではないし、上記の文章において「表象」とは何かという問題もあるのだが、細かいことはさておき、この文章が示すように、主語と述語との組み合わせとして「正しい」「真」とされる命題が成立するということは、そこに具体的対象、具体的事象、具体的事実、具体的知覚経験（想像・回想としての心像の場合もあろう）がある、ということなのである。

「そこに一頭の馬が走っている」という文章・命題が正しい時、そこに実際に走っている馬が見えている、一つの具体的経験として現れているということなのである。一つの具体的事象（ヒュームの言葉で言えば印象・観念）として現れているからこそ、主語と述語とが結びついていられるのである。そこに現れている一つの具体的事象は、「馬」であり「走っている」でもある。

つまり述語のみを論理として別個に取り扱おうとする場合においても、結局「走る」「走っている」という言葉と、それに対応する具体的事象とのセットとして取り扱わざるをえない、ということなのである。

「述語」「集合」というものを実体化させて別の意味を持たせ、それを一つの要素として扱う・・・それは論理上も許されない。仮に要素として扱う場合においても、それぞれが具体的事物であることを無視して論理を構築することはできないのである。それを無視した時、論理が現実と齟齬をきたし、パラドクスであると考えられたりするのである。