選言の真偽とはいったい何なのか：
（¬Ａ∨Ｂ）≡（Ａ→Ｂ）に根拠はあるのか

2023 年 4 月 19 日　宮国淳
http://miya.aki.gs/mblog/
（※ 2023 年 5 月 12 日：全体的に修正。表４・表 10 を追加。）

本稿は選言の真理値はどのような値をとりうるのか、論理学における選言の真理値とはいったいどういうものなのか、具体的事例を細かく分析した上で考察するものである。
そのうえで、（¬Ａ∨Ｂ）≡（A→B）という論理学の真理値設定は根拠を持ちうるのかについても検討する。
論理学では以下のような真理値をとるとされている。

A	B	A∨B	¬A∨B	A→B
真	真	真	真	真
真	偽	真	偽	偽
偽	真	真	真	真
偽	偽	偽	真	真

しかし具体的事例を挙げて考えてみると、シチュエーション・前提条件によってさまざまな値をとりうることが分かるのである。

＜目次＞ ※ ()内はページ

１．１つの対象に関する説明における選言（2）
２．二つの対象に関する選言（6）
３．選言の真理値は前提条件によりさまざまな値をとりうる（8）
４．トートロジーは形式論理として現れるものなのか？（トートロジーと真理値表との関係に関する疑問）（8）
＜引用文献＞（9）

１．１つの対象に関する説明における選言

瀬山士郎著『数学にとって証明とはなにか』（講談社、2019 年）では、条件法（A→B）の真理値設定（A→Bにおいて前件Aが偽ならばA→Bは常に真という設定）が「*常識的に考えておかしい気がするかもしれません*」（瀬山、78 ページ）と認めた上で、「*数学での約束だと思ってもらっていい*」（瀬山、78 ページ）とし、「*こんな約束をする理由*」（瀬山、78 ページ）について以下のように説明されている。

> *「A でないか、あるいは B である」が正しいとしましょう。もし A でないならば「A でないか」の部分が正しいので、B の真偽にかかわらず、「A でないか、あるいは B である」は正しくなります。一方、A ならば、A でないということが間違っているので、「あるいは」という言葉の相棒である B が正しいほかありません。つまり、A ならば B なのです！*
>
> *ようするに、「A ならば B である」とは「A でないか、あるいは B である」の言いかえなのです。*（瀬山、79 ページ）

・・・上記の瀬山氏による説明は、((¬A∨B)∧A)→B であること、そして¬A であっても¬A∨B は真であるということを説明しているだけである。

瀬山氏は具体例としても説明されている。

> *たとえば、「(この三角形は) 2 等辺三角形でないか、あるいは 2 つの低角が等しいかのどちらかである」という言明を 5 回ほど口に出して言ってみてください。三角形は 2 等辺三角形でないか、あるいは (もし 2 等辺三角形ならば) 2 つの低角が等しいかのどちらかです。*
>
> *こうして、「A ではないか、あるいは B である」と口に出して何度も言ってみると。これが「A ならば B である」ことの言いかえであることが分かるのではないでしょうか。*（瀬山、79 ページ）

・・・この瀬山氏の文章において”*(この三角形は)*”という説明があるので、一つの三角形に対する言及であることになるであろう。この”前提”がなければ¬Ａ∨Ｂはいったい何に対して真偽を問うているのかよく分からないということになってしまう。そうなれば真理値表は表１のようになる。**いくら命題が記号化され（一見）形式化されたところで、その命題の指し示す具体的対象というものがなければ真偽を問うことさえできない**のである。

さらに言えば、対象が四角形や円だったり、牛や羊といった動物だったらただのナンセンスになってしまうだけである。

表 1

A	B	¬A	¬A∨B	具体例
真	真	偽	?	2 等辺三角形ではない（あるいは） 2 つの低角が等しい
真	偽	偽	?	2 等辺三角形ではない（あるいは） 2 つの低角が等しくない
偽	真	真	?	2 等辺三角形である（あるいは） 2 つの低角が等しい
偽	偽	真	?	2 等辺三角形である（あるいは） 2 つの低角が等しくない

次に、一つの対象としてそこに見える三角形について説明しているという前提のもと真理値表を作成してみよう。表 1 の 1 行目は（2 等辺三角形ではない）∨（2 つの低角が等しい)、つまり（2 等辺三角形ではない）∨（2 等辺三角形である）という、これこそ”トートロジー”を示しているように思える（このトートロジーは対象が三角形である前提において成立するものであって、あらゆるシチュエーションにおける真理というわけではないことに注意)。

2 行目、(2 等辺三角形ではない）∨（2 つの低角が等しくない）は、もしその三角形が二等辺三角形ではなければ正しいし、二等辺三角形だったら正しくない。つまり真偽の判断はその三角形が何かによる、ということになる。文章のみで真偽判断ができない。

3 行目 (2 等辺三角形である) ∨ (2 つの低角が等しい) も 2 行目と同じ (というか真逆)。もしその三角形が二等辺三角形ならば真で、そうでなければ偽。

4 行目は 1 行目同様、（2 等辺三角形である）∨（2 等辺三角形ではない）のトートロジー。結果、表 2 のような真理値表になる。

表 2

A	B	¬A	¬A∨B	具体例
真	真	偽	トートロジー（真）	2 等辺三角形ではない（あるいは） 2 つの低角が等しい
真	偽	偽	真偽判断できない	2 等辺三角形ではない（あるいは） 2 つの低角が等しくない
偽	真	真	真偽判断できない	2 等辺三角形である（あるいは） 2 つの低角が等しい
偽	偽	真	トートロジー（真）	2 等辺三角形である（あるいは） 2 つの低角が等しくない

ここで前提を変えてみよう。対象となる三角形が 2 等辺三角形だったとする。この場合は

確かに論理学で定められている A→B の真理値と合致するように思える（表３）。ただし、この事例における A→B の実際の真理値は表４のようになり、結局（¬Ａ∨Ｂ）≡（A→B）は支持されない。

表３

A	B	¬Ａ	¬Ａ∨Ｂ	具体例
真	真	偽	真	２等辺三角形ではない（あるいは） ２つの低角が等しい
真	偽	偽	偽	２等辺三角形ではない（あるいは） ２つの低角が等しくない
偽	真	真	真	２等辺三角形である（あるいは） ２つの低角が等しい
偽	偽	真	真	２等辺三角形である（あるいは） ２つの低角が等しくない

ここで（¬Ａ∨Ｂ）が表３のような真理値をとるということは、対象が２等辺三角形であるということが前提となっている。つまりＢが常に正しく¬Ａが正しくなる（真になる）ことはありえない、「Ａではないか、あるいはＢである」どころか、「Ａ∧Ｂ（が真）である」ことが既に前提となった上での言及（文章？説明？）なのである。つまり表３における**３行目４行目が成立しえない**、ということでもあるのだ。

つまり（A∧B）→（A→B）が分かっているということなのだが、この論理式（¬Ａ∨Ｂ）はその前提について何も説明してはいない。

表４

A	B	A→B	具体例
真	真	真	２等辺三角形ならば２つの低角が等しい
真	偽	偽	２等辺三角形ならば２つの低角が等しくない
偽	真	偽	２等辺三角形でないならば２つの低角が等しい
偽	偽	真	２等辺三角形でないならば２つの低角が等しくない

別の考え方もある。¬Ａ∨Ｂとして示されている「(2 等辺三角形ではない)または(2 つの低角が等しい)」という説明文が正しいという前提のもとで真理値を考えるのである（表５）。その三角形は２等辺三角形かそうでないかどちらかだ（結局これもトートロジーではある）が、どちらかは分からない・・・非常に特殊なシチュエーションである。

２行目は２等辺三角形でない、３行目は二等辺三角形である、と断定してしまっている。「(2 等辺三角形ではない)または(2 つの低角が等しい)」という説明文だけからは、どちらかだと断定することはできないので、真偽が判断できないということになってしま

う。結果的に、表２と同じ真理値になる。

ただ、真偽判断できないことを偽とみなせば（ありえないことではあるが)、A→B と同値ということもできるのであるが・・・

表５

¬A	B	¬A∨B	A→B
真	真	真 (2 等辺三角形ではない、あるいは２つの低角が等しい)	真 （２等辺三角形である→２つの低角が等しい)
真	偽	真偽判断できない （2 等辺三角形ではない、あるいは２つの低角が等しくない)	偽 （２等辺三角形である→２つの低角が等しくない)
偽	真	真偽判断できない （2 等辺三角形である、あるいは２つの低角が等しい)	偽 （２等辺三角形ではない→２つの低角が等しい)
偽	偽	真 （2 等辺三角形である、あるいは２つの低角が等しくない)	真 （２等辺三角形ではない→２つの低角が等しくない)

さらに別の考え方もできる。「(2 等辺三角形ではない)または(2 つの低角が等しい)」ということが分かっている。ではこの**説明文が示しうる事態としてどういうケースが考えられうるのか**、という見方だ。当然対象は一つの三角形である。後述するが、この考え方は論理学的に真理値を考える場合のやり方と同じである。

つまり２等辺三角形であってもなくても三角形であることには変わりないので、１～４行までどれも真になる（表６)。そもそも１・４行目がトートロジーであるのだが。

表６

¬A	B	¬A∨B	具体例
真	真	真	２等辺三角形ではない（あるいは）２つの低角が等しい
真	偽	真	２等辺三角形ではない（あるいは）２つの低角が等しくない
偽	真	真	２等辺三角形である（あるいは）２つの低角が等しい
偽	偽	真	２等辺三角形である（あるいは）２つの低角が等しくない

2．二つの対象に関する選言

他の事例を挙げてみよう。「*無門か道元の少なくともどちらかが寺にいる*」（野矢茂樹著『論理学』東京大学出版会、1994 年、18 ページ）という場合である。『論理学』223 ページの説明では下の表（表７）のようになる。「無門か道元の少なくともどちらかが寺にいる、しかしどちらかは分からない」という言及が正しいという前提のもとで、**それがありうる事態かどうかの判断を示した真理値表**である。表６と同じ考え方であり、論理学的に真理値を考えるやり方でもある。当然、論理学における真理値設定と同じ値になる。

表７

A	B	A ∨ B
真（無門は寺にいる）	真（道元は寺にいる）	真
真（無門は寺にいる）	偽（道元は寺にいない）	真
偽（無門は寺にいない）	真（道元は寺にいる）	真
偽（無門は寺にいない）	偽（道元は寺にいない）	偽

しかし別の考え方もある。ありうる事態かどうかの判断は、それが本当に正しいかどうかを示すものではない。なぜなら「無門か道元の少なくともどちらかが寺にいる」という言及からは無門と道元どちらが寺にいるのかは不明なのだから。これに関しては、当然表４のような考え方もできるのである。（無門は寺にいる）∨（道元は寺にいる）ということが分かっている。しかしどちらがいるかは分からない。無門が寺にいる、とか道元が寺にいない、と断言はできないのである。そう考えると表８のようになるであろう。

表８

A	B	A ∨ B
真（無門は寺にいる）	真（道元は寺にいる）	真
真（無門は寺にいる）	偽（道元は寺にいない）	真偽がわからない
偽（無門は寺にいない）	真（道元は寺にいる）	真偽がわからない
偽（無門は寺にいない）	偽（道元は寺にいない）	偽

次に¬A∨B について考えてみよう。「無門か道元の少なくともどちらかが寺にいる」ことが「正しい」という前提のもので考えれば、真理値は論理学における A→B のものと同じになる（表９）。

表 9

A	B	¬A	¬ A ∨ B
真 （無門は寺にいる）	真 （道元は寺にいる）	偽 （無門は寺にいない）	真
真 （無門は寺にいる）	偽 （道元は寺にいない）	偽 （無門は寺にいない）	偽
偽 （無門は寺にいない）	真 （道元は寺にいる）	真 （無門は寺にいる）	真
偽 （無門は寺にいない）	偽 （道元は寺にいない）	真 （無門は寺にいる）	真

しかし一方で、**この事例において A→B が真偽をとりうる根拠というものが全く見つからない**。三角形の事例と異なり、A と B との間に何の関係もないからである（表 10）。無門が寺にいたとしても、道元が寺にいるのかどうか明らかではないのである。

表 10

A	B	A→B
真（無門は寺にいる）	真（道元は寺にいる）	?
真（無門は寺にいる）	偽（道元は寺にいない）	?
偽（無門は寺にいない）	真（道元は寺にいる）	?
偽（無門は寺にいない）	偽（道元は寺にいない）	?

さらに考えるべきこととして、表 9 は A∨B つまり（無門は寺にいる）∨（道元は寺にいる）が正しいという前提における真理値である。¬ A ∨ B の真理値を考えるにあたって、まずは¬ A ∨ B、つまり「（無門は寺にいない）または（道元は寺にいる）」が正しいという前提で考える必要があるのではなかろうか？ そうなれば、真理値は次のように書き換える必要がある（表 11）。

表 11

¬A	B	¬ A ∨ B
真（無門は寺にいない）	真（道元は寺にいる）	真
真（無門は寺にいない）	偽（道元は寺にいない）	真
偽（無門は寺にいる）	真（道元は寺にいる）	真
偽（無門は寺にいる）	偽（道元は寺にいない）	偽

このように前提を変えていくと選言の真理値は様々な値をとりうることが分かるであろ

う。そして¬Ａ∨Ｂの真理値がＡ→Ｂの（論理学における）真理値設定の根拠になるわけでもないことがご理解いただけたであろうか。

３．選言の真理値は前提条件によりさまざまな値をとりうる

　ここまで見てきた事例の範囲で言えることは、選言は

(1)　１つの対象について説明する場合。
(2)　「Ａあるいは B」という説明が「正しい」とした上でその説明との関係によって導かれる場合。

において始めて真理値をとりうる、ということである。選言は何の前提もなしに真理値が与えられるわけではないのだ。論理学では機械的に真理値をあてがうが、実際にそんなことが常に通用するわけではない。私たちの日常的現実認識から自動的に選言における論理学的真理値設定が導かれるのではない、というのが結論である。
　また、（¬Ａ∨Ｂ）≡（Ａ→Ｂ）が論理学的なトートロジーであるという見解は、具体的事例において支持されないこともこれまでに説明してきた。
　¬Ａ∨Ｂの“意味”は、¬Ａあるいは B どちらか、あるいは両方が真であるのだが、どちらが真なのか分からない、という状況のことである。¬Ａが真の場合もありうる、ということなのだ。つまりＡ→Ｂではないシチュエーションも含みうるということなのであって、その意味合い的にも（¬Ａ∨Ｂ）≡（Ａ→Ｂ）である道理はどこにもないのである。
　論理学では真偽（あるいは１や０）を機械的にあてがって真理値表を作成する。しかし実際の事例から考えてみるに、この機械的作業は私たちの現実世界認識により根拠づけられているわけではない、その論理の真偽が成立するための前提・シチュエーションにより事情が異なってくるのだ、ということが分かるであろう。

４．トートロジーは形式論理として現れるものなのか？（トートロジーと真理値表との関係に関する疑問）

　最後に、トートロジーというものの考え方に関して論理学的見方は正しいのかという疑問を提示しておく。

論理学において、トートロジーとは真理値表で常に真になることとされている。しかし表２、表５、表６で示したように、トートロジーは特定の前提のもとで真理値表において局所的に現れる。しかも¬Ａ∨Ｂであるにもかかわらずである。

トートロジーとは特定の形式論理として現れるものではなく、あくまで**特定の前提のもとで、ある文章が示す具体的内容として現れる**ものなのではなかろうか？ トートロジーと真理値表との関係性に疑問を感じざるをえないのである。

＜参考文献＞

瀬山士郎著『数学にとって証明とはなにか』（講談社、2019 年）
野矢茂樹著『論理学』（東京大学出版会、1994 年）