命題を（論理学的）トートロジーと決めつけた上で A→Bの真理値を逆算するのは正当か？

2023 年 4 月 21 日
宮国淳（ http://miya.aki.gs/ ）
※ 2023 年 4 月 26 日に第 3 章を修正
※ 2023 年 5 月 18 日に第 5 章の後半部分を修正

本稿は、条件法の真理値を論理学的トートロジーとされる論理から定義・証明する手法は正当なのかを問うものである。

戸田山和久著『論理学をつくる』（名古屋大学出版会、2000 年）、3.10.2 「→」の定義の正当化（82〜83 ページ）において、

> *(1) A→B と B→A とは論理的同値ではない。*
> *(2) ((A→B)∧(B→A))→(A→C)はトートロジーである。*
> *この２つの制約を満たすように「→」を真理表により定義*（戸田山、82 ページ）

・・・という手法がとられている。

同様に、前原昭二著『記号論理入門』（日本評論社、新装版、2005 年）でも、論理学的トートロジー（とされるもの）から真理値表が逆算される、という手法がとられている。

本稿ではこの手法の問題点を指摘し、それらが一種の循環論理となっていること、完全性・健全性を求めると私たちの日常的な真偽判断と乖離してしまうことを説明する。

＜目次＞ ※ ()内はページ

1．A→B と B→A とはシチュエーションによって論理的同値であったりなかったりする（それが事実）

まず（1）について考えてみよう。「Xが犬ならば（A）、Xは動物である（B）」について、私たちの日常的判断においては次のようになるであろう。当然 A→B と B→A とは論理的同値ではない。

表1

A	B	A→B	B→A
真	真	真 （ポチは犬である →ポチは動物である）	真偽が定まらない （ポチは動物である →ポチは犬である）
真	偽	偽 （ポチは犬である →ポチは動物ではない）	偽 （ポチは動物ではない →ポチは犬である）
偽	真	真偽が定まらない （ポチは犬ではない →ポチは動物である）	真偽が定まらない （ポチは動物である →ポチは犬ではない）
偽	偽	真偽が定まらない （ポチは犬ではない →ポチは動物ではない）	真 （ポチは動物ではない →ポチは犬ではない）

この命題の場合、Xに「馬」を代入すれば、「馬が犬ならば、馬は動物である」というナンセンス文になってしまう。これは（いくら後件が真であったとしても）果たして条件文全体として真と言えるのであろうか？

「チワワが犬ならば、チワワは動物である」「ポチが犬ならば、ポチは動物である」という代入ならば成立する。つまりXに代入される言葉には一定の制限があるのだとも言えよう。

さらに別の事例について考えてみよう。たとえば今日が遠足の日で、昨日「明日雨が降らなければ遠足に行く」という決定事項が皆に知らされていたとする。さて遠足当日になったとき、天気と遠足との関係は次のようになると考えられる。

表2

A	B	A→B	B→A
雨が降らない	遠足に行く	真	真
雨が降らない	遠足に行かない	偽	偽
雨が降る	遠足に行く	偽	偽
雨が降る	遠足に行かない	真	真

これは、真理値表の一行目の言及が「正しい（真)」であるという前提のもとで導かれたものである。戸田山氏が A→B と B→A とが論理的同値になると考えたのはこういったシチュエーションであろう。

しかしよく考えてみてほしい。この場合はこれが実際に「正しい」のであって、この正しさは形式論理における理屈によって覆されるものではない。A→B、B→A の真理値は時に異なり時に同じになる。それが事実である。A→B と B→A が同値になるかならないかは、具体的事実が指し示すだけであって、同値ではだめだという必然性はない。

それを無理に異なる真理値に設定しようというのであるから、私たちの一般的事実認識と乖離してしまうのは当然である。

2．((A→B)∧(B→A))→(A→C)が”論理学的”トートロジーである必然性はない

一般的な理解において、三段論法はA、B、Cそれぞれが真である場合に成立するものである。上記命題 A が偽の場合は想定されていないし、そもそも A が偽ならば A→B が正しいことが保証されるわけではない。

つまり私たちの日常的事実認識において、((A→B)∧(B→C))→(A→C)が“論理学的”トートロジーである必然性は全くないのである。一般的に（たぶん私たちが）三段論法が正しいと思うのは、繰り返しになるがA、B、Cそれぞれが真である場合であると思う。

論理学における真理値の取り決めに従って真理値表を作成すると表３のようになる。

表３

A	B	C	A→B	B→C	(A→B)∧(B→C)	A→C	((A→B)∧(B→C))→(A→C)
真	真	真	真	真	真	真	真
真	真	偽	真	偽	偽	偽	真
真	偽	真	偽	真	偽	真	真
真	偽	偽	偽	真	偽	偽	真
偽	真	真	真	真	真	真	真
偽	真	偽	真	偽	偽	真	真
偽	偽	真	真	真	真	真	真
偽	偽	偽	真	真	真	真	真

つまり論理学的にはトートロジーということになる。しかし C という最終結論が正しくないときに、三段論法が正しくなるのはいかがなものだろうか？ 同様に、A→B が正しくないとき、B→C が正しくないとき、三段論法が正しくなる、というのもやはりおかしな話である。

B が偽ならば A→B は偽となる。最終結論が偽ならば条件法は偽になるのである。繰り返しになるが、三段論法について考えるとき A→B、B→C どちらかでも正しくない場合に三段論法が成立するとは普通考えないであろう。

・・・これらのことを考えたとき、そもそもトートロジーとは何なのか、真理値表とは何なのか、という根本的問題についても考え直す必要性を感じてしまうのである。そして**恒真とは言えない論理学的トートロジーとはいったい何なのであろうか？**

3．論証の妥当性は論証の形式ではなく内容、そして論理空間にかかわる

戸田山氏は『論理学をつくる』13 ページにおいて、

〇〇はすべて□□である
□□はすべて××である
〇〇はすべて××である　（※本稿では論証①とする）

・・・という形式をもっていれば、論証の内容がわからなくても妥当性が分かるとしている。しかし、論証がいくら上の形をしていても、1 行目の内容、2 行目の内容そのものが「正しく」なければ、いくら上記の形式であっても妥当ではないことは明らかである。

東京はすべて山形である
山形はすべて豆腐である
東京はすべて豆腐である　（※論証②とする）

・・・これはどうみても妥当な論証であるとは言えない。「*前提がすべて真なのに結論が偽になるようなケースはありえない*」（戸田山、12 ページ）とあるように、前提が「真」となること、論証①において〇〇、□□、××どうしが実際に、現実として、具体的に言語で示されたような関係を有していることが条件となる。その条件がそろってはじめてその論証は妥当であると言えるのだ。つまり**「形式」ではなく「内容」**なのである。

戸田山氏は次の論証を、「*偽の命題を含んだ正しい論証*」（戸田山、10 ページ）としている。

平賀源内は『スターウォーズ：エピソード１』の出演者である

『スターウォーズ：エピソード1』の出演者はみんなジョージ・ルーカスのことを知っている

平賀源内はジョージ・ルーカスのことを知っている

（戸田山、9 ページ、※本稿では論証③とする）

しかし、これはどう考えても「正しい」論証とは言えないものである。**偽の命題を含んでいる時点で、論証そのものの正当性を問うことなどできはしない。**

しかし、同じ”論理形式”で論証②が全く「正しい」と思えないにもかかわらず、論証③の場合は「偽の命題を含んだ正しい論証」であるという説明が少しだけ説得力を持ってしまうのはなぜであろうか？

・・・それは論証③で示されるようなフィクションの世界を想像することが可能だからである（ウィトゲンシュタインの言う「事態」として描けるということ）。私たちは平賀源内がタイムスリップしてスターウォーズに出演する様子を想像することはできるし、そういう小説を書くこともできる（一方で論証②のようなシチュエーションを想像することはできないように思える）。

論証③は現実世界では全くの間違いである。ありえない。一方、平賀源内がタイムスリップしてスターウォーズに出演する小説というものがあったとして、その小説の内容について説明する場合、論証③は「正しい」ことになる。

つまり、**現実における論理空間とは異なる小説における論理空間というものがあり、それぞれにおける真偽関係というものがありうる**、ということなのである。

野矢氏は『ウィトゲンシュタイン『論理哲学論考』を読む』(野矢茂樹著、筑摩書房、2006年）で次のように説明されている。

たとえば「サンタクロースがプレゼントをくれる」という命題において、「サンタクロース」が指示対象をもたないと分かったときのように。そのとき、要素命題「a は f」は偽とされるだろうか。それとも、ナンセンスになるのだろうか。

こんどの答えは、「ナンセンス」である。

というのも、「a は f」は要素命題であるから、その名がいかなる対象も表わさないということになれば、それは端的に像として成立していないものとなり、像ではないものに対しては、真といえないのはもちろん、もはや偽と言うこともできないのである。(野矢 2006 年、136～137 ページ）

・・・「サンタクロースがプレゼントをくれる」という命題をナンセンスと判断するかは議論の分かれるところであろう。私たちは「サンタクロースがプレゼントをくれる」という状況を想像することができるし、そういったおとぎ話は世界中にあちこちあると思われる。そのおとぎ話という論理空間においては、「サンタクロースがプレゼントをくれる」という命

題は真であると判断できる。しかし現実として考えれば当然、偽となる。

つまり、同じ文章（命題）であっても、その命題の背景となる論理空間が現実であるかおとぎ話の内容であるかによって、その真偽判断が異なってくるのである。

学校の授業では、国語の時間に小説の内容についての問題を解いて正解や不正解になる。野矢氏の説明では、私たちが学校で解いてきたそれらの問題の答えは全部ナンセンスということになってしまう。

もっとも、世界中には公認されたサンタクロースの人たちがいるようなので、そのことを考慮に入れれば「サンタクロースがプレゼントをくれる」という命題はナンセンスどころか事実なのであるが・・・

野矢氏はウィトゲンシュタイン『論理哲学論考』を引き合いに出し、次のように説明されている。

> *3・25 命題の完全な分析がひとつ、そしてただひとつ存在する。*
>
> *これは論理空間がひとつであることを言い換えたものにほかならない。*（野矢 2006年、139 ページ：『論理哲学論考』からの引用含む）

しかし、ここまで説明してきたように、上記のような主張は正当化されない。実際には様々な論理空間が形成可能なのである。

ここまで見てきたように、**命題の真偽は、事実であれ事態であれ、現実であれ想像上のお話であれ、その命題が指し示す何らかの対象を見出せるかどうか、つまりその命題の意味・内容にかかわっている**のである。

それがつくり話でも良い。それが何らかの架空の対象でありうるのであれば、その対象を指し示す命題は（そのつくり話の論理空間においては）真となるのである。もちろん現実では偽となるのだが。そしてそれをナンセンスと呼ぶのかどうかは先に述べたように議論の分かれるところである。

三段論法はその論理形式ゆえに正しいのではない。その内容、そして背景となる論理空間に応じて正しくなったり間違いになったりするのである。つまり論理形式のみから”恒真”であるという結論を導き出すことはできないし、それが論理学的トートロジーであるという根拠にもならないのである。

４．命題を（論理学的）トートロジーと決めつけた上でＡ→Ｂの真理値を逆算するのは正当か？

次に前原昭二著『記号論理入門』（新装版、日本評論社、新装版、2005 年）の手法について分析してみよう。前原氏は論理学的（＝論理学で定められている）トートロジー、

(1) B→（A→B）
(2) ¬A→（A→B）
(3) A→[¬B→¬（A→B）]

・・から条件法（A→B）の真理値を逆算されている（前原、64 ページ）。本章は(1)について説明する。前原氏は(1)を以下のように”証明”されている。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{A}\qquad\overset{2}{B}}{A\wedge B}}{B}\;1}{A\to B}\;2}{B\to(A\to B)}$$

（前原、42 ページ）

演繹論理は、それぞれの命題が真、¬がついたときには偽という前提で構築されているように思える。たとえば「２つの命題ＡおよびＡ→Ｂの真理値がともに$^{\vee}$であるならば，Ｂという命題の真理値も$^{\vee}$である」（前原、62 ページ）というふうにである。演繹論理においては少なくとも「*Ａ の否定¬Ａ の真理値が*$^{\vee}$*のとき，および，そのときに限って，Ａの真理値は*$^{\wedge}$*である*」（前原、62 ページ）ということはありえない。

ＡとＢを前提としてＡ∧Ｂが成立する場合、ＡあるいはＢが（あるいはＡＢともに）偽だったら成立するはずがない。ＡもＢも真だからこそＡ∧Ｂが成立するのである。

> *Ａ∧ＢはＡとＢの両方が成立するとき，および，そのときに限って成立するということ*（前原、42 ページ）

つまり、**Ｂ→（Ａ→Ｂ）は、ＡもＢも真であるという前提で演繹された論理**であるということなのだ（もちろんＡとＢとの関係性の問題は未解決である）。ＡかＢが偽だったら成立するはずがない。

連言はこのような日常的事実認識に基づく真理関係から構築した演繹論理であるはずなのだが、真理値を“証明”するときには、Ａが偽の場合（あるいはＡが定義されていない場合）

が想定されているのである。

> *（1）という命題の真理値が∨であることを利用すれば，Bの真理値が∨である場合にはA→Bの真理値が∨となることがわかります．すなわち，Bの真理値が∨でありさえすれば，Aの真理値が∨であっても∧であっても[または，Aの真理値が定義されていなくても]A→Bの真理値は∨であります．*（前原、65 ページ）

(1)において、AとBが真以外の真理値をとりえない、そのことによって(1)が成立していることは既に説明した。Aの真理値が∧であることはありえないのである。つまりA→Bの真理値表３行目（Aが偽でBが真）の証明は不可能であると言える。

証明云々の話を考慮しなくても、B→（A→B）が常に正しいという根拠を私たちの日常的事実認識・真偽判断から導くことは不可能である。後件Bのみが正しいと分かっているとき、任意の命題Aを前件としてA→Bが成立すると考えることは非常に不自然である。「今日雨が降っている」という事実から、「日本の首都が東京（富山でも良い）であるならば今日は雨が降っている」という命題を導くというのは非常に理不尽な話である。

この理不尽な命題を、とにかく“トートロジー”と定めた上で（上記「*（1）という命題の真理値が∨であることを利用すれば*」という表現がそれを示している)、それが成立するように条件法の真理値を設定し、その真理値によりトートロジーであると説明するという一種の**循環論理**が成立しているのである。

5．一つの命題にAと¬A双方が含まれるのは正当なのか？

先に述べたように、前原氏は論理学的（論理学で定められている）トートロジー、

(1) B→（A→B)
(2）¬A→（A→B)
(3) A→[¬B→¬（A→B）]

・・から条件法（A→B）の真理値を逆算されているのであるが（前原、64 ページ)、果たして(2)(3)は論理式として正当なものと言えるのであろうか？

(2)には¬AとAとが含まれている。(3)には¬BとBとが含まれているのである。¬AとA（そして¬BとB）とが一つの命題として、一つの論理空間における論理として成立するはずがないではないか。**トートロジーどころか矛盾**である。

公理系における演繹規則というものは、それぞれの命題が真であり、¬がついたときは偽であるという暗黙の前提が存在している。そうでなければ公理・定理が成立しない。

(2)と(3)は、その証明過程において矛盾から命題が導かれている。次のとおりである。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A} \qquad \overset{2}{\neg A}}{\curlywedge}}{B}\ \curlywedge\text{に関する推論}}{A \to B}\ 1}{\neg A \to (A \to B)}\ 2$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{3}{A} \quad \overset{1}{A \to B}}{B} \qquad \overset{2}{\neg B}}{\curlywedge}}{\neg(A \to B)}\ 1}{\neg B \to \neg(A \to B)}\ 2}{A \to [\neg B \to \neg(A \to B)]}\ 3$$

（前原、64 ページ）

・・・どちらも矛盾から任意の命題が導かれるという規則により”証明”されているのである。しかし、この規則はただの論理学における”取り決め”であって、そこに何の根拠を見出すこともできない。

これらの論理をトートロジーと認め、そこから真理値を逆算し、さらにその真理値設定を用いて健全性・完全性を検証するという、これも循環論理であると言える。

では、次の定理はどうであろうか？

$$((A \vee B) \wedge \neg A) \to B$$

この命題には A と¬A が同居しているにもかかわらず、あまり違和感を抱かないのはなぜだろうか？

・・・それは私たちがこの命題が持つ”ニュアンス”を自らこの命題にあてがっているからである。こういうことである・・・(A または B）であるということは分かっている。しかし A か B どちらが真かはわかっていない・・・あるとき、A が偽であることが分かった→ならばBが真であると判明した。

A さんと B さんしか事件現場にいなかった、しかしどちらが犯人かは分からない。しかしある証拠が見つかり A さんは犯人ではないことが明らかとなった→ならば B さんが犯人である、といった感じだろうか。

それが A∨B という論理式が持つ特有の”意味”なのである。しかし”*意味抜き*”（野矢茂樹著『論理学』東京大学出版会、1994 年、56 ページ）された規則だというのであればAと¬Aが同居する論理は明らかな矛盾ということになってしまう。

このように、論理学における命題論理は意味抜きされているどころか、命題を操作・判読する人たちにこのようなニュアンス、ストーリーを暗黙のうちに読み取ることを要求しているのである。

６．完全性・健全性は論理の正しさを担保するものではない

ここまでの説明で明らかになったように、論理学における真理値設定は、まずはトートロジーありき、さらには完全性・健全性ありきの人為的設定なのである。**論理学的トートロジーが本当に”恒真”（＝常に正しい）とは限らない。**

よくわからない論理（条件法で前件が偽の場合とか）には真理値「真」をあてがっておけば、健全性・完全性をクリヤーすることができる、そして“論理学的”トートロジーが量産（？）できるのである。

命題論理の健全性・完全性の検証では、条件法の真理値設定が重要な役割を担っている（もちろん連言・選言その他の真理値も重要である）。ウカシェビッチの公理系にいたっては、条件法の真理値設定を最大限に利用しているように思える。

極端な話、現実世界を無視してＡ∨ＢもＡ∧ＢもＡ→Ｂも、全部真理値を「真」にしてしまえば、健全性・完全性が簡単にクリヤーできるのである。

論理学における真理値設定は、私たちの日常的真偽判断と人為的設定が入り混じっている。時には背後のニュアンスやストーリーの理解を要求したりもする。それゆえに命題論理における真理値の根拠を原理的に示すことが出来ないのである。

＜引用文献・参考文献＞

戸田山和久著『論理学をつくる』(名古屋大学出版会、2000 年)

前原昭二著『記号論理入門』(新装版、日本評論社、新装版、2005 年)

野矢茂樹著『ウィトゲンシュタイン『論理哲学論考』を読む』(筑摩書房、2006 年)

野矢茂樹著『論理学』(東京大学出版会、1994 年)

（拙著）

選言の真偽とはいったい何なのか：(¬Ａ∨Ｂ）≡（Ａ→Ｂ）に根拠はあるのか

http://miya.aki.gs/miya/miya_report38.pdf

・・・選言（Ａ∨Ｂ）の真理値とは何か、論理学的真理値設定に根拠はあるのか、ということについて考察しています。選言の真理値はそれぞれにおける特定の前提があってはじめて現われるもので、しかもその前提により様々な値をとります。論理学では機械的に特定の真理値をあてがいますが、実際にそんなことが常に通用するわけではない、その論理の真偽が成立するための前提・シチュエーションにより事情が異なってくるのだ、というのが結論です。